Proseminar Hyperebenenarrangements, WS 2015

Mathias Schulze

23. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Inhaltsskizze zu den Vorträgen

1.1 Grundbegriffe, Lineare Algebra

Literatur: [2, §1.2,2.1], [3, §1.1]
Inhalt:

- Definitionen: $V \cong K^n$ ($n = \ell$), Hyperebenenarrangement $\mathcal{A}$ in V, definierendes Polynom $Q = \prod_{H\in\mathcal{A}}(\alpha_H - c_H)$, Kardinalität $|\mathcal{A}|$, Dimension $\dim \mathcal{A} = \dim V$, Rang $\operatorname{rk} \mathcal{A}$, Zentrum $T(\mathcal{A})$
- Eigenschaften: zentral/linear, essentiell, generisch
- Produkte von Arrangements, (ir)reduzible Arrangements
- Essentialisierung $\operatorname{ess} \mathcal{A}$ eines Arrangements $\mathcal{A}$
- jedes Arrangement ist Produkt seiner Essentialisierung mit einem leerem Arrangement
- $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$
- entweder (wenn H Brücke/Separator) $\operatorname{rk} \mathcal{A} = \operatorname{rk} \mathcal{A}' = \operatorname{rk} \mathcal{A}'' + 1$, sonst $\operatorname{rk} \mathcal{A} = \operatorname{rk} \mathcal{A}' + 1 = \operatorname{rk} \mathcal{A}'' + 1$
- Beispiele

1.2 Schnittverband, Einschränkung und Lokalisierung

Literatur: [2, §2.1], [3, §1.2,2.1]
Inhalt:

- Definition: $L(\mathcal{A})$, partielle Ordnung, Rangfunktion
- $L(\mathcal{A})$ ist geometrischer Verband für $\mathcal{A}$ zentral
- Beispiel von teilgeordneter Menge aber nicht-Verband
- Alle maximalen Elemente von $L(\mathcal{A})$ haben gleichen Rang
- Hasse-Diagramm
- Einschränkung $\mathcal{A}^X$
- Unterarrangements, Lokalisierung $\mathcal{A}_X$, Essentialisierung von $\mathcal{A}_X$
- $L(\mathcal{A}_Y)^X = [X, Y]$
- Beispiele

1.3 Kammern, Projektivisierung und Kegel

Literatur: [1, p.3-5], [2, §2.1], [3, §1.1]
Inhalt:

- Für $K = \mathbb{R}$: Menge $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ und Zahl $r(\mathcal{A})$ der Kammern, Konvexität Kontrahierbarkeit der Kammern, Zahl $b(\mathcal{A})$ der relativ beschränkten Kammern
- Projektiver Raum
- Projektives Arrangement $\mathbb{P}\mathcal{A} = \mathrm{proj}(\mathcal{A})$ zu $\mathcal{A}$, $r(\mathcal{A}) = 2r(\mathbb{P}\mathcal{A})$
- Kegel $c\mathcal{A}$, Entkegelung $d\mathcal{A}$
- $L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$
- $\phi : L(\mathcal{A}\times\{\{0\}, K\}) \twoheadrightarrow L(c\mathcal{A})$ (siehe [2, Prop. 2.17]), warum nicht injektiv?
- Beispiele

1.4 Möbius-Funktion

Literatur: [2, §2.2], [3, §1.3]
Inhalt:

- Definition: Möbius Funktion $\mu_{\mathcal{A}}(X, Y)$
- Definition: $S(X, Y)$
- $\mu(X, Y) = \sum_{\mathcal{B}\in S(X,Y)} (-1)^{\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_X}$
- Möbius Inversionsformel
- Definition: Möbius Funktion $\mu_{\mathcal{A}}(X)$
- $\mu_{c\mathcal{A}}(Z) = \sum_{Y\in\phi^{-1}(Z)} \mu_{\mathcal{A}}(Y)$
- Beispiele

1.5 Charakteristisches Polynom, Entfernen–Einschränken

Literatur: [2, §2.3], [3, §2.1]
Inhalt:

- Defintion: Charakteristisches Polynom $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(\mathcal{A}, t)$, Poincaré-Polynom $\pi_{\mathcal{A}}(t) = \pi(\mathcal{A}, t)$
- Korollar (aus letztem Vortrag): Whitneys Theorem
- Korollar (aus letztem Vortrag): $\pi(c\mathcal{A}, t) = (1 + t)\pi(\mathcal{A}, t)$
- $\pi_{\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2} = \pi_{\mathcal{A}_1}\pi_{\mathcal{A}_2}$, $\pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathrm{ess}\,\mathcal{A}}$

- Entfernen–Einschränken Theorem
- L- vs. π-Äquivalenz
- Beispiele

1.6 Beispiele Charakteristischer Polynome, endliche Körper-Methode

Literatur: [2, Thm. 2.69], [3, §5.1-5.2]
Inhalt:

- $|M(\mathcal{A})| = \chi_{\mathcal{A}}(q)$ für $K = \mathbb{F}_q$
- Reduktion $\mathcal{A}_q$ von $\mathcal{A}$ bzgl. Primzahlpotenz $q = p^r$
- $\mathcal{A}$ hat gute Reduktion für fast alle Primzahlen
- $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_q}$ bei guter Reduktion
- $\chi_{\mathcal{A}}$ für Coxeter-Arrangements
- $\chi_{\mathcal{A}}$ für Shi-Arrangements

1.7 Graphische Arrangements

Literatur: [2, §2.4], [3, §2.3]
Inhalt:

- Definition: Graph G, graphisches Arrangement $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}(G)$
- Beziehung graphisches zu Zopf-Arrangement
- Definition: Chromatisches Polynom χ_G
- χ_G ist Polynom, $\deg \chi_G$ ist Anzahl der Knoten von G
- Entfernen $G' = G \setminus e$, Kontrahieren $G'' = G/e$
- $\mathcal{A}_{G'} = \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_{G''} = \mathcal{A}''$
- $\chi_{\mathcal{A}_G} = \chi_G$
- $\chi_{\mathcal{A}}$ für Zopf-Arrangment
- Definition: (azyklische) Orientierung auf G, $AO(G)$
- $AO(G) = \mathcal{C}(\mathcal{A}_G)$
- Beispiele

1.8 Zaslavskys Abzählsatz

Literatur: [2, p.4, Thm. 2.68], [3, §2.1-2.2]
Inhalt:

- $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$
- $r(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}, 1)$
- $b(\mathcal{A}) = (-1)^{\operatorname{rk} \mathcal{A}} \pi(\mathcal{A}, -1)$
- $\chi_{\mathcal{A}}$, $r(\mathcal{A})$, $b(\mathcal{A})$ für generisches $\mathcal{A}$
- Beispiele

1.9 Überauflösbare Arrangements

Literatur: [2, p.30-32,48-49], [3, §4.3]
Inhalt:

- Definition: modulare Elemente von $L(\mathcal{A})$
- Definition: Überauflösbarkeit für $L(\mathcal{A})$
- Geometrisch/induktive Interpretation der Überauflösbarkeit von $\mathcal{A}$
- Faktorisierung von $\pi_{\mathcal{A}}$ für überauflösbares $\mathcal{A}$
- Beispiele

1.10 Abstand(sfunktionen) von Kammern

Literatur: [3, §6]
Inhalt:

- Details werden bei Interesse angegeben.

1.11 $\mathcal{A}$-Derivationen

Literatur: [2, §4.1,A.1,A.3]
Inhalt:

- Freie/Graduierte Moduln (ohne Beweis)
- Menge $\operatorname{Der}_K S$ der Derivationen auf $S = K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$
- $\operatorname{Der}_K S$ ist graduierter S-Modul, Grad homogener Elemente
- Definition: $D(\mathcal{A})$
- $D(\mathcal{A})$ ist graduierter S-Untermodul von $\operatorname{Der}_K S$, hat homogenes Erzeugendensystem

- $D(\mathcal{A}) = \bigcap_{H \in A} D(\alpha_H)$
- Definition: Euler Derivation θ_E
- Geometrische Interpretation von $D(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A} \mapsto D(\mathcal{A})$ ist Inklusionsumkehrend
- $D(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = SD(\mathcal{A}) \oplus SD(\mathcal{A})$
- Beispiele

1.12 Freie Arrangements

Literatur: [2, p.103,§4.2]
Inhalt:

- Definition: Freies Arrangement
- $D(\mathcal{A})$ hat homogene Basis wenn $\mathcal{A}$ frei
- Koeffizientenmatrix von $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathrm{Der}_K(\mathcal{A})$
- Saito's Kriterium
- $\mathcal{A}$ frei wenn $\theta_1, \ldots, \theta_n \in D(\mathcal{A})$ linear unabhängig und $\sum_{i=1}^n \mathrm{pdeg}(\theta_i) = |\mathcal{A}|$
- mit $\mathcal{A}$ is auch $\mathcal{A}_X$ frei (ohne Beweis)
- Beispiele

1.13 Exponenten

Literatur: [2, p.108-113]
Inhalt:

- Definition: Exponentenmenge $\exp \mathcal{A} = \{k^{e_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ (mit Multiplizitäten e_k)
- hier alle $\mathcal{A}$ frei
- für $\mathcal{A} \neq 0$, kommt θ_E in einer Basis von $D(\mathcal{A})$ vor
- $\dim \mathcal{A} = \sum_k e_k$, $|\mathcal{A}| = \sum_k k e_k$
- $\exp(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \exp(\mathcal{A}_1) \cup \exp(\mathcal{A}_2)$
- $e_0 = \dim \mathcal{A} - \mathrm{rk}\, \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ is Produkt von e_1 nichtleeren irreduziblen Arrangements
- $\exp \mathcal{A} = \{1, |\mathcal{A}| - 1\}$ für $\mathcal{A} \neq \emptyset$
- Beispiele

1.14 Hinzufügen–Entfernen und Faktorisierungssatz

Literatur: [2, §4.3]
Inhalt:

- Exakte Sequenz $0 \to D(\mathcal{A}') \to D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}'')$
- Terao's Hinzufügen–Entfernen Satz (ohne Beweis)
- Definition induktiv freier Arrangements
- überauflösbarere Arrangements sind induktiv frei
- Beispiele induktiv freier Arrangements
- Terao's Faktorisierungssatz, evtl. Beweis für rekursiv freie Arrangements
- Beispiele

Literatur

[1] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[2] Peter Orlik and Hiroaki Terao. *Arrangements of hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[3] Richard P. Stanley. An introduction to hyperplane arrangements. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 389–496. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. Preprint at `http://www-math.mit.edu/~rstan/arrangements/arr.html`.