TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015/16 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 18.1.2016, 14:00h

Hinweis: Aufgabe 3 bezieht sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 13.1.2016 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgabe bis nach der Vorlesung oder lesen Sie bis 8.1 im Skript von Andreas Gathmann.

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$. Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}_m$ nach $\mathbb{Z}_n$.

Aufgabe 2. Es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^2 \in \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$\mathbb{Z}[a] := \{m + na \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[a]$ ein Ring ist.

(b) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

Hinweis zu (b),(c): Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{Z}[a]$ betrachte man das Betragsquadrat $|z|^2$. Aus den Grundlagen der Mathematik dürfen Sie verwenden, dass $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 3. Ist I ein Ideal in einem Ring R, so heißt $\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ das Radikal von I.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ wieder ein Ideal von R ist.

(b) Man zeige: Ist $a \in \sqrt{\{0\}}$, so ist $1 + a$ eine Einheit in R.

(c) Berechnen Sie das Ideal $\sqrt{180\mathbb{Z}} \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. (Präsenzaufgabe) Zeigen Sie:

(a) Ist $f : K \to R$ ein Ringhomomorphismus von einem Körper K in einen Ring R, so ist f injektiv.

(b) Von den drei Ringen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind keine zwei isomorph zueinander.