

## Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015/16 - Übungsblatt 8

Abgabetermin: 11.1.2016, 14:00h

*Hinweis: Aufgabe 3 bezieht sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 6.1.2016 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgabe bis nach der Vorlesung oder lesen Sie bis 7.13 im Skript von Andreas Gathmann.*

### Aufgabe 1.

- Seien  $G$  und  $H$  zwei endliche Gruppen mit teilerfremden Ordnungen, d.h. 1 ist die einzige Zahl in  $\mathbb{N}$  die gleichzeitig  $|G|$  und  $|H|$  teilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, dass es nur einen Homomorphismus von  $G$  nach  $H$  gibt.
- Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen von  $(\mathbb{Z}_9, +)$  nach  $(\mathbb{Z}_{16}, +)$  sowie von  $(\mathbb{Z}_9, +)$  nach  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ .

### Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- Bestimmen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 2 auf Blatt 7) alle Untergruppen der zyklischen Gruppe  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .
- Zeigen Sie: Ist  $G$  eine endliche zyklische Gruppe und  $n$  ein Teiler der Ordnung von  $G$ , so gibt es genau eine Untergruppe von  $G$  der Ordnung  $n$ , und diese ist ebenfalls zyklisch.

### Aufgabe 3.

- Bestimmen Sie alle Einheiten in  $\mathbb{Z}_{15}$ .
- Zeigen Sie, dass  $\overline{n-1}$  in  $\mathbb{Z}_n$  für  $n \in \mathbb{N}_{>1}$  eine Einheit ist.
- Berechnen Sie  $\overline{5^{12345}}$  in  $\mathbb{Z}_7$ .
- Es sei  $a \in \mathbb{Z}_{11}$ . Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a$  alle  $x, y \in \mathbb{Z}_{11}$ , die das Gleichungssystem

$$\overline{5}x + \overline{6}y = \overline{4} \tag{1}$$

$$\text{und } \overline{8}x + \overline{9}y = a \tag{2}$$

in  $\mathbb{Z}_{11}$  erfüllen.