TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 14.12.2015, 14:00h

Hinweis: Aufgaben 2 und 3 beziehen sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 9.12.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgaben bis nach der Vorlesung oder lesen Sie die entsprechenden Kapitel im Skript von Andreas Gathmann. Außerdem wird das Thema der Wohldefiniertheit zusätzlich noch in den Übungen am 10./11.12.2015 vertieft. Sollten Sie Probleme mit Aufgabe 2 haben, so könnte es hilfreich sein, mit der Bearbeitung dieser Aufgabe bis nach der Übung zu warten.

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe, $a, b \in G$, $f_a : \mathbb{Z} \to G, k \mapsto a^k$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist die Ordnung von a endlich, so gilt: $\operatorname{ord}(a) = n \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$.

(b) Die Ordnung von a ist genau dann unendlich, wenn $\operatorname{Ker}(f_a) = \{0\}$ ist.

(c) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$

(d) $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$

Aufgabe 2.

(a) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen wohldefiniert sind:

(i) $f_1 : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(ii) $f_2 : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(iii) $f_3 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(b) Für welche $m, n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$ wohldefinert?

Hinweis: Aufgabenteil (a) soll Ihnen helfen ein geeignetes Kriterium für die Wohldefiniertheit in Teil (b) aufzustellen. Natürlich reicht es dieses Kriterium in Teil (b) zu beweisen und dann daraus zu folgern, welche der Abbildungen in Teil (a) wohldefiniert sind.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnungen $3, 4, 5, 9$ und 21 von S_4.
Hinweis: Gehen Sie strategisch vor! Überlegen Sie sich zunächst welche Ordnungen die Elemente in den jeweiligen Untergruppen haben können beziehungsweise welche "Ordnungskombinationen" möglich sind (zum Beispiel: Sie stellen fest, dass die maximal mögliche Ordnung der Elemente in einer Untergruppe m ist. Zwei mögliche Ordnungskombinationen könnten sein: "es gibt ein Element der Ordnung m und für die anderen Elemente gilt daher..." oder "alle Elemente haben Ordnung kleiner als m, nämlich Ordnungen ..."). Überlegen Sie sich als nächstes, wie die Elemente dieser Ordnungen in S_4 aussehen. Bestimmen Sie dann für jede Ordnungskombination alle möglichen Untergruppen.
*Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass die von Ihnen bestimmten Untergruppen in der Tat Untergruppen der entsprechenden Ordnung sind und dass Sie **alle** Untergruppen der gegebenen Ordnungen bestimmt haben.*

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)**.** Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe $D_{10} = \langle \sigma, \tau \rangle \leq S_5$, wobei $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.