Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: 7.12.2015, 14:00 Uhr

Hinweis: Aufgaben 2 und 3 beziehen sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 2.12.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgaben bis nach der Vorlesung oder lesen Sie die entsprechenden Kapitel im Skript von Andreas Gathmann.

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen f Homomorphismen sind und berechnen Sie gegebenenfalls $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$:

(a) $f : (\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{R},+),\ f(m,n) = 4m + 6n$;

(b) $f : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q},+), f(x) = x$;

(c) $f : G \to G, f(a) = g \circ a \circ h$ für eine Gruppe $(G,\circ)$ und gegebene $g, h \in G$.

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie das Signum aller Elemente der Diedergruppe D_{2n} (siehe Aufgabe 1, Blatt 4), wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
Hinweis: Sollten Sie diesen Aufgabenteil in dieser allgemeinen Form nicht oder nur teilweise lösen können, dann bearbeiten Sie diesen Aufgabenteil beziehungsweise die fehlenden Teile für den Spezialfall $n = 5$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Eine $n \times n$*-Matrix* A über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq i,j \leq n.$$

Wir bezeichnen eine solche Matrix kurz mit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Die *transponierte Matrix* von A ist $A^t = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$. Wir definieren die *Determinante* von A als

$$\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Zeigen Sie, dass für die Determinante $\det(A) = \det(A^t)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $\{1,\dots,n\} = \{\pi(1),\dots,\pi(n)\}$ für $\pi \in S_n$ gilt.

Aufgabe 3.

(a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Zeigen Sie: Durch $m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2)$ wird eine Äquivalenzrelation auf M definiert (wir nennen diese Äquivalenzrelation *Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich* f.)

(b) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzrelation $\sim'$ auf einer nicht-leeren Menge M' als Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich einer geeigneten Abbildung g dargestellt werden kann.
Hinweis: Die Zielmenge der Abbildung g muss natürlich von M' und $\sim'$ abhängen.