TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 30.11.2015, 14:00h

Hinweis: Aufgaben 2 und 3(a)(i),(b) beziehen sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 25.11.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgaben bis nach der Vorlesung oder lesen Sie Kapitel 4 im Skript von Andreas Gathmann.

Aufgabe 1 (Die Diedergruppe D_{2n})**.** Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sigma^n = \tau^2 = (1)$ und $\tau \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \tau$.

(b) $\tau \circ \sigma^k = \sigma^{-k} \circ \tau$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) Es gilt
$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{\sigma^k \circ \tau^\ell \mid k = 0, \ldots, n-1, \ell = 0, 1\}$$
und diese Untergruppe von S_n, die sogenannte **Diedergruppe** D_{2n} (gesprochen: Di-eder-gruppe), besteht aus $2n$ Elementen.

Aufgabe 2. Sei $\phi : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Ist $G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, so ist ϕ bereits durch die Bilder $\phi(g_1), \ldots, \phi(g_r)$ eindeutig bestimmt.

(b) Zeigen Sie: Für $g \in G$ mit $\operatorname{ord}(g) < \infty$ gilt, dass $\operatorname{ord}(g)$ von $\operatorname{ord}(\phi(g))$ geteilt wird. Ist ϕ ein Isomorphismus, so gilt sogar $\operatorname{ord}(\phi(g)) = \operatorname{ord}(g)$.

(c) Nehmen Sie nun an, dass $G = \langle g \rangle$ mit $\operatorname{ord}(g) = n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Homomorphismen von G nach H.
Hinweis: Beachten Sie, dass $g^l = g^k$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ genau dann gilt, wenn $l - k \in n\mathbb{Z}$. Insbesondere müssen Sie also darauf achten, dass die Homomorphismen g^k und g^l auf dasselbe Element in H abbilden falls $l - k \in n\mathbb{Z}$.

(d) Sei $G = H = \langle (1\,2\,3\,4\,5\,6) \rangle \subset S_6$. Bestimmen Sie alle Isomorphismen von G nach H.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

(a) Zeigen Sie:

(i) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$. Dann ist die Abbildung

$$\Psi_g : G \to G,\ h \mapsto ghg^{-1}$$

ein Gruppenisomorphismus.

(ii) Für einen k-Zykel $\sigma = (a_1 \dots a_k) \in S_n$ und $\pi \in S_n$ gilt:

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1) \dots \pi(a_k)).$$

Verallgemeinern Sie außerdem die obige Formel für beliebige $\sigma \in S_n$.

(b) Sind die folgenden Gruppen G und H isomorph?

(i) $G = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(2) = 2\}$ und $H = S_{n-1}$
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (a).

(ii) $G = S_2 \times S_2$ und $H = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle \subset S_4$