TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 3

Abgabetermin: 23.11.2015, 14:00h

Hinweis: Aufgaben 1 und 3 beziehen sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 18.11.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgaben bis nach der Vorlesung oder lesen Sie Kapitel 3 im Skript von Andreas Gathmann. Aufgabe 2 ist bereits jetzt lösbar, wir empfehlen Ihnen jedoch ein Untergruppenkriterium (Lemma 3.3 oder Aufgabe 1) zu benutzen.

Aufgabe 1. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine nicht-leere Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden vereinfachten Untergruppenkriterien:

(a) U ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $a \cdot b^{-1} \in U$ für alle $a, b \in U$.

(b) Hat U nur endlich viele Elemente, so ist U eine Untergruppe von G genau dann, wenn $a \cdot b \in U$ für alle $a, b \in U$.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen U Untergruppen der Gruppe G sind.

(a) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $U = \{(a, b) \in G \mid b = 2^a\}$.

(b) $G = S_4$ und $U = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^2 = (1)\}$.

(c) $G = S_4$ und $U = \{(1)\} \cup \{\sigma \in S_4 \mid \sigma \text{ ist eine Transposition}\}$.

(d) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax^2 + bx + c\}$ für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Ob U eine Untergruppe von G ist, hängt von der Wahl der Parameter a, b und c ab. Sie müssen untersuchen, für welche Wahlen der Parameter die Menge U eine Untergruppe von G ist und für welche nicht (und dies dann natürlich auch beweisen).

(e) $(G, \circ)$ eine beliebige Gruppe und

$$U = Z(G) = \{z \in G \mid z \circ g = g \circ z \text{ für alle } g \in G\}.$$

Aufgabe 3. Es sei M eine Teilmenge einer Gruppe G (mit der Verknüpfung $\cdot$).

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\langle M \rangle = \{a_1 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in M \text{ oder } a_i^{-1} \in M \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$.
Hinweis: Das leere Produkt (das im Fall $n = 0$ auftritt) ist per Konvention das neutrale Element $e \in G$.

(b) Nehmen Sie nun an, dass G abelsch ist und $|M| < \infty$. Beschreiben Sie $\langle M \rangle$ möglichst explizit.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Zeigen Sie: $\langle (1\ 2\ 3), (1\ 3) \rangle = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i \text{ für } 4 \leq i \leq n\}$.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)**.** Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U_1, U_2 \leq G$ Untergruppen. Man zeige:

(a) Für alle $a \in G$ ist $a \circ U_1 \circ a^{-1} := \{a \circ u \circ a^{-1} \mid u \in U_1\}$ eine Untergruppe von G.

(b) Im Allgemeinen ist $U_1 \circ U_2 := \{a \circ b \mid a \in U_1, b \in U_2\}$ keine Untergruppe von G.

(c) Gilt jedoch $a \circ b \circ a^{-1} \in U_2$ für alle $a \in U_1$ und $b \in U_2$, so ist $U_1 \circ U_2$ eine Untergruppe von G.