TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 16.11.2015, 14:00h

Hinweis: Aufgabe 3 behandelt ein Thema, das erst in der Vorlesung am 11.11.2015 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung der Aufgabe bis nach der Vorlesung oder lesen Sie Kapitel 2 im Skript von Andreas Gathmann.

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $a \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0} := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ mit $a^n = e$. Wir nennen das minimale Element $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit dieser Eigenschaft die *Ordnung* von a und schreiben $n_0 =: \operatorname{ord}(a)$.

(b) Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = b^n$.

(c) Für $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = n$ gilt $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ und $a^i \neq a^j$ für $1 \leq i < j \leq n$.

Gelten die Aussagen auch für nicht-endliche Gruppen?

Aufgabe 2. Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ nennt man eine rationale 2×2-Matrix und man bezeichnet die Menge solcher Matrizen mit $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Wir definieren auf $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$ die Verknüpfung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \in \mathbb{Q}$$

die **Determinante** der Matrix und definieren

$$\operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}) := \{A \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Beweisen Sie:

(a) Für $A, B \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$ gilt: $\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b) $(\operatorname{GL}_2(\mathbb{Q}), \circ)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe (die Assoziativität braucht nicht nachgewiesen zu werden).

Aufgabe 3. Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$.

(a) Berechnen Sie σ^{-1}.

(b) Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

(c) Schreiben Sie σ als Komposition von disjunkten Zykeln.

(d) Schreiben Sie σ als Komposition von Transpositionen.

(e) Bestimmen Sie σ^m für alle $m \in \mathbb{Z}$. Verallgemeinern Sie Ihr Resultat für $\pi \in S_n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ indem Sie π als Komposition disjunkter Zykel schreiben. Was können Sie insbesondere über die Ordnung von π aussagen?

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)**.** Für welche $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die symmetrische Gruppe S_n abelsch?