TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015/16 - Übungsblatt 11

Abgabetermin: 1.2.2016, 14:00h

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Wir nennen ein Element $a \in R$ *nilpotent* falls es ein $l \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit $a^l = 0$. Zeigen Sie:

(a) Das *Nilradikal* $N_R := \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$ ist ein Ideal von R.

(b) Ist die Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in R[\![t]\!]$ nilpotent, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ der Koeffizient $a_n \in R$ nilpotent.

(c) Ein Polynom $f = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n \in R[t]$ ist genau dann nilpotent, wenn für alle $n \in \{0, \dots, m\}$ der Koeffizient $a_n \in R$ nilpotent ist. Dies bedeutet, dass $N_{R[t]} = \langle N_R \rangle_{R[t]}$ ist.

Aufgabe 2. Für eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ über einem Ring R definieren wir die (formale) Ableitung als $f' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$

(a) Man zeige: Für alle $f, g \in R[\![t]\!]$ gilt $(f+g)' = f' + g'$ und $(fg)' = f'g + fg'$.

(b) Bestimmen Sie in den beiden Fällen $R = \mathbb{R}$ und $R = \mathbb{Z}_7$ alle Potenzreihen mit Ableitung $0 \in R[\![t]\!]$.

Aufgabe 3. Man zeige:

(a) Sind $R \leq S$ Ringe und $x \in S$, so ist die Auswerteabbildung

$$\varphi_x : R[t] \to S,\ a = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mapsto a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ein Ringhomomorphismus.
(Notation: Wir bezeichnen den Unterring $\mathrm{Im}(\varphi_x) \leq S$ mit $R[x]$.)

(b) Jedes Element des Ringes $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle$ lässt sich in der Form $\overline{a_1 t + a_0}$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ schreiben.

(c) Die Abbildung $\mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1 \rangle \to \mathbb{C}, \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j t^j} \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j i^j$ ist ein Ringisomorphismus.

(d) (Präsenzaufgabe) Seien R, S und x wie in Aufgabenteil (a). Ist x eine Nullstelle des Polynoms $g = t^n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \in R[t]$, so ist

$$R[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in R\}.$$

(e) (Präsenzaufgabe) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^2 \in \mathbb{Z}$. Dann stimmt die Definition von $\mathbb{Z}[a]$ in Aufgabenteil (a) mit der in Aufgabe 2 (Übungsblatt 9) gegebenen Definition von $\mathbb{Z}[a]$ überein.