Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 2015/16 - Übungsblatt 10

Abgabetermin: 25.1.2016, 14:00h

Hinweis: Aufgabe 3 bezieht sich auf Stoff, der erst in der Vorlesung am 20.1.2016 behandelt wird. Warten Sie daher mit der Bearbeitung dieser Aufgabe bis nach der Vorlesung oder lesen Sie bis 9.4 im Skript von Andreas Gathmann.

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Es sei R ein Ring und $x \in R$ mit $x^2 = x$. Zeigen Sie:

(a) Das von x erzeugte Ideal $\langle x \rangle$ ist ein Ring. Was ist das Einselement in $\langle x \rangle$?

(b) Die Abbildung $f : R \to \langle x \rangle, f(a) = ax$ ist ein Ringhomomorphismus.

(c) Der Ring $\langle x \rangle$ ist isomorph zu $R/\langle 1 - x \rangle$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $I, J \trianglelefteq R$ Ideale, so dass es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ gibt mit $x + y = 1$. Zeigen Sie, dass die Ringe $R/(I \cap J)$ und $R/I \times R/J$ isomorph sind.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\pi : R \to R/I \times R/J, a \mapsto (\bar{a}, \bar{a})$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ über einem Ring R genau dann in $R[\![t]\!]$ invertierbar ist, wenn $a_0 \in R^*$.