TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Wintersemester 15/16 - Übungsblatt 0

Präsenzübung

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob folgende Mengen und Verknüpfungen Gruppen sind:

(a) $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ mit der Verknüpfung $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ für alle $(a,b),(c,d) \in G$,

(b) $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $(a,b) * (c,d) = (a+d, b+c)$ für alle $(a,b),(c,d) \in G$.

Aufgabe 2:

(a) Eine Halbgruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$ (d.h. einer Abbildung $\circ : G \times G \to G$, $(g,h) \circ g \circ h)$, die das Gruppenaxiom (G1) erfüllt. Zeigen Sie: Eine nicht-leere Halbgruppe G ist genau dann eine Gruppe, wenn für beliebige $a, b \in G$ die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ eindeutig in G lösbar sind.

(b) Eine Verknüpfung $*$ auf einer endlichen Menge $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich mit Hilfe einer Verknüpfungstafel beschreiben:

$*$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$\cdots$	$a_1 * a_j$	$\cdots$	$a_1 * a_n$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i	$a_i * a_1$	$\cdots$	$a_i * a_j$	$\cdots$	$a_i * a_n$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	$a_n * a_1$	$\cdots$	$a_n * a_j$	$\cdots$	$a_n * a_n$

Sei $G' = \{a_1, a_2, a_3\}$. Stellen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) alle möglichen Verknüpfungstafeln auf, so dass G' mit der dadurch definierten Verknüpfung $*$ eine Gruppe ist.