TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Nachklausur Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013

27.9.2013, 9:00–11:00 Uhr

Alle nicht offensichtlichen Rechen-/Beweisschritte sind zu begründen. Resultate und Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen benutzt werden, müssen dazu aber konkret benannt (z.B. „nach dem Homomorphiesatz für Gruppen“) oder formuliert werden.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen des Kongruenzgleichungssystems (Lösungen und Zwischenergebnisse durch Ausprobieren werden nicht akzeptiert):

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv -3 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+4 Punkte)**.** Wir definieren für zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$:

$$a \sim b :\Leftrightarrow \text{es existieren } r, s \in \mathbb{N}_{>0} \text{ mit } a^r = b^s.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ definiert und berechnen Sie die Äquivalenzklasse von 144.

Aufgabe 3 (5+7 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe und A eine nichtleere Teilmenge von G. Wir definieren

$$N_G(A) = \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $N_G(A)$ eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie $N_{S_5}(\langle(1\,2\,3)\rangle)$.

Aufgabe 4 (5+3 Punkte)**.** Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}] := \{a + b\sqrt{-7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass 2 in R irreduzibel ist.

(b) Beweisen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist. (Sie dürfen verwenden, dass $1 + \sqrt{-7}$ und $1 - \sqrt{-7}$ in R irreduzibel sind.)

Aufgabe 5 (4+5 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe, und seien H und K Untergruppen von G. Zeigen Sie:

(a) $G = H \cup K$ genau dann, wenn $G = H$ oder $G = K$ gilt.

(b) Sind die Untergruppen H und K konjugiert (d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $H = gKg^{-1}$), so ist $G = HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ genau dann, wenn $G = H$ gilt.

Aufgabe 6 (6+7 Punkte)**.** Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal eines kommutativen Rings R (mit Eins), X eine Unbestimmte und

$$I(X) := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}; a_i \in I \text{ für } 0 \leq i \leq n \right\} \subseteq R[X].$$

(a) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $(R/I)[X] \cong R[X]/I(X)$ und zeigen Sie, dass es sich um einen Isomorphismus handelt.

(b) Sei $M \ntrianglelefteq R$ ein *maximales Ideal*, das heißt, für alle Ideale $I \ntrianglelefteq R$ folgt aus $M \subseteq I$, dass $I = M$ ist. Betrachten Sie die Menge $\mathfrak{M}$ aller Ideale von $R[X]$, die $M(X)$ enthalten:

$$\mathfrak{M} := \{ J \trianglelefteq R[X] \mid M(X) \subseteq J \}.$$

Bestimmen Sie die Ideale in $\mathfrak{M}$ eindeutig.