TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 29.6.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die folgenden Untermengen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und überprüfen Sie, ob es sich um Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume handelt.

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1 + 1 \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 = 3x_2 \right\}$

(d) $U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2 \right\}$

(e) $U_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\}$

(f) $U_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Bonusfrage: Für welche Wahlen von $a_1, \ldots, a_r, b \in \mathbb{R}$ ist

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \mid a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_r \cdot x_r = b \right\}$$

ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^r$?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien weiterhin $U, U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen sind äquivalent sind:

(a) $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$

(b) $U = U_1 + \cdots + U_k$ und für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_k) = \{0\}$$

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt

$$U_6 + \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

wobei U_6 wie in Aufgabe 1 definiert sei.

(b) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V^4$ linear unabhängig und $M_1 = (v_1, v_2, v_3)$, $M_2 = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3)$, $M_3 = (v_1 + 3v_3, v_2 + v_1, v_1 + v_3)$. Dann gibt es genau zwei $i \in \{1, 2, 3\}$, so dass M_i linear unabhängig ist.

(c) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U_3 K-Untervektorräume von V mit $U_1+U_2 = U_1 \oplus U_2$, $U_1+U_3 = U_1 \oplus U_3$ und $U_2+U_3 = U_2 \oplus U_3$. Dann gilt auch $U_1+U_2+U_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

(d) Sei K ein Körper. Dann ist $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \mid x_1^2 + x_1 = 2 \right\}$ kein Untervektorraum von K^2.

Aufgabe 4. Sei $V := \mathbb{R}[X]/\langle 3X^5 + X^3 + X \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass V mit der gewöhnlichen Addition und der durch

$$\mathbb{R} \times V \to V,\ (r, \overline{f}) \mapsto \overline{rf}$$

(wobei $f \in \mathbb{R}[X]$ und $\overline{f}$ bzw. $\overline{rf}$ die Äquivalenzklasse von f bzw. rf in V bezeichne) definierten Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V.
Hinweis: Division mit Rest ist hilfreich.