TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 7

Abgabetermin: 15.6.2015, 9:45h

Aufgabe 1.

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Charakterisieren Sie $\mathbb{Z}_n^*$ mittels größter gemeinsamer Teiler geeigneter Zahlen in $\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_{15}^*$ zu einem Produkt der Form $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ isomorph ist (mit $a, b \in \mathbb{N}_{>1}$).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{Z}_{15}$ zu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ isomorph ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Einheiten und Nullteiler von $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^n \rangle$ (wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$).

Aufgabe 3.

(a) Sei R ein euklidischer Ring. Zeigen Sie, dass jedes endlich erzeugte Ideal von R ein Hauptideal ist.

(b) Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. Zeigen Sie:

(i) $g \in \mathrm{ggT}(a, b) \Leftrightarrow \langle g \rangle$ ist das minimale Hauptideal, das $\langle a, b \rangle$ enthält

(ii) $k \in \mathrm{kgV}(a, b) \Leftrightarrow \langle k \rangle$ ist das maximale Hauptideal, das in $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ enthalten ist

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was minimales/maximales Hauptideal in diesem Kontext bedeutet.

Aufgabe 4. Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um einen größten gemeinsamen Teiler von $f = 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ und $g = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ zu bestimmen und diesen als Linearkombination von f und g darzustellen.
Hinweis: Führen Sie die einzelnen Schritte des euklidischen Algorithmus explizit auf Ihrer Abgabe aus.