TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 8.6.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Sei $R[x]$ ein Polynomring über dem Ring R. Beweisen Sie:

(a) Die Multiplikation in $R[x]$ ist in der Tat assoziativ: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ für alle $f, g, h \in R[x]$.

(b) Für alle Ringhomomorphismen $\varphi : R \to S$ und alle $y \in S$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\Phi : R[x] \to S$, so dass

- $\Phi|_R = \varphi$
- $\Phi(x) = y$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\langle 5, 7\rangle$ und $\langle 6, 9\rangle$ sind Hauptideale in $\mathbb{Z}$.

(b) $\langle 2, x\rangle \subset \mathbb{Z}[x]$ ist kein Hauptideal.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\deg(f) + \deg(g) = deg(fg)$ *für* $f, g \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ *gilt.*

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]/\langle x^4\rangle, \ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}}.$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Ringhomomorphismus.

(b) $\ker(\varphi) = \langle x^2\rangle$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(m, n \in \mathbb{N}_{>0})$, von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.