Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: 1.6.2015, 9:45h

Aufgabe 1.

(a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Wir definieren für $m_1, m_2 \in M$
$$m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2).$$
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert. (Wir nennen diese Äquivalenzrelation *Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich* f.)

(b) Zeigen Sie: Jede Äquivalenzrelation $\sim'$ auf einer nicht-leeren Menge M' kann als Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich einer geeigneten Abbildung g dargestellt werden.
Hinweis: Die Zielmenge der Abbildung g *muss natürlich von* M' *und* $\sim'$ *abhängen.*

(c) Sei M eine nicht-leere Menge und $\sim_1$ und $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen auf M. Wir definieren für $a, b \in M$
$$a \sim_\vee b :\Leftrightarrow (a \sim_1 b \ \vee \ a \sim_2 b)$$
und
$$a \sim_\wedge b :\Leftrightarrow (a \sim_1 b \ \wedge \ a \sim_2 b)\,.$$
Untersuchen Sie, ob die Relationen $\sim_\vee$ and $\sim_\wedge$ Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnungen $3, 4, 5, 9$ und 21 von S_4.

Hinweis: Beachten Sie: Sie müssen beweisen, dass die von Ihnen bestimmten Untergruppen in Tat Untergruppen der entsprechenden Ordnung sind *und* dass Sie alle Untergruppen der gegebenen Ordnungen bestimmt haben.

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie eine Untergruppe von S_3 an, die kein Normalteiler ist.

(b) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, N_G ein Normalteiler von G und N_H ein Normalteiler von H. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}(N_H)$ ein Normalteiler von G ist, $\varphi(N_G)$ im Allgemeinen aber kein Normalteiler von H ist.

Aufgabe 4.

(a) Sei G eine zyklische Gruppe endlicher Ordnung n. Zeigen Sie, dass G dann zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Hinweis: Konstruieren Sie einen surjektiven Homomorphismus $\pi : \mathbb{Z} \to G$ und verwenden Sie den Homomorphiesatz.

(b) Seien m und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{a} \mapsto \bar{a}$ genau dann wohldefiniert ist, wenn n ein Teiler von m ist.