TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 22.5.2015, 11:30h

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $a \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = e$. Wir nennen das minimale Element $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit dieser Eigenschaft die *Ordnung* von a und schreiben $n_0 = \operatorname{ord}(a)$.

(b) Für $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = n$ gilt $\langle a \rangle = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$.

Hinweis: Sie dürfen die Existenz einer Division mit Rest benutzen: Zu $m, l \in \mathbb{Z}$ mit $l \neq 0$ existieren $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$m = ql + r \text{ und } 0 \leq r < |l|.$$

(c) (Untergruppenkriterium für endliche Gruppen) Eine nicht-leere Teilmenge U von G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn für alle $a, b \in U$

$$a \circ b \in U$$

gilt.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen U Untergruppen der Gruppe G sind.

(a) G das Produkt von $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $U = \{(a, b) \in G \mid b = 2^a\}$.

Hinweis: Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Das Produkt $(G, \cdot) \times (H, \circ)$ ist die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$* : (G \times H) \to (G \times H), ((g, h), (g', h')) \to (g \cdot g', h \circ h').$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Produkt zweier Gruppen wieder eine Gruppe ist.

(b) $G = S_4$ und $U = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^2 = (1)\}$.

(c) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax^2 + bx + c\}$ für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Ob U eine Untergruppe von G ist, hängt von der Wahl der Parameter a, b und c ab. Sie müssen untersuchen, für welche Wahlen der Parameter die Menge U eine Untergruppe ist und für welche nicht (und dies dann natürlich auch beweisen).

(d) $(G, \circ)$ eine beliebige Gruppe, $V \subseteq G$ eine Untergruppe, $a \in G$ und $U = a \circ V \circ a^{-1} = \{a \circ v \circ a^{-1} \mid v \in V\}$.

Aufgabe 3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $M \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge. Zeigen Sie :

$$\langle M \rangle = \{g_1^{\alpha_1} * \cdots * g_n^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}, g_1, \ldots, g_n \in M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Aufgabe 4.

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen f Homomorphismen sind und bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$ falls f ein Homomorphismus ist:

(i) $f : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +),\ f(x, y) = (2x - 3y, 6y - 4x)$;

(ii) $f : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +), f(x) = x$;

(b) Untersuchen Sie, ob $G = S_2 \times S_2$ und $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \subset S_4$ isomorph sind.