TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 3

Abgabetermin: 18.5.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ ein Verknüfungsgebilde, das folgende Eigenschaften hat:

(i) $\circ$ ist assoziativ.

(ii) Es exisitiert ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e \circ g = g$. (Wir nennen e ein *linksneutrales Element* bezüglich $\circ$.)

(iii) Für alle $g \in G$ existiert $g' \in G$ mit $g' \circ g = e$. (Wir nennen g' ein *Linksinverses* zu g.)

Wir wollen beweisen, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie für das Linksinverse g' von $g \in G$, dass $g \circ g' = e$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie, dass nach (ii) ein Linksinverses $g'' \in G$ für g' mit $g'' \circ g' = e$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $g \circ e = g$ für alle $g \in G$ gilt.

(c) Sind das linksneutrale Element und das linksinverse Element von $g \in G$ jeweils eindeutig?

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob es sich um Gruppen handelt:

(a) $G = 7\mathbb{Z} := \{7z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der gewöhnlichen Addition als Verknüpfungsvorschrift,

(b) $G = 7\mathbb{Z}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfungsvorschrift,

(c) $G = 7\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfungsvorschrift $a * b = a + b + 98$ für alle $a, b \in G$,

(d) $G = 7\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfungsvorschrift $a * b = a + b + 99$ für alle $a, b \in G$.

Aufgabe 3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit vier Elementen.

(a) Beweisen Sie (ohne die Verwendung von Verknüpfungstafeln), dass G abelsch ist.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Verknüpfungstafeln für G.

Aufgabe 4. Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 5 & 9 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$.

(a) Berechnen Sie σ^{-1}.

(b) Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

(c) Schreiben Sie σ als Komposition von disjunkten Zykeln.

(d) Beweisen Sie, dass $|S_n| = n!$ gilt (wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$).