TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 12

Abgabetermin: 20.7.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $C = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ die Matrix $M_{B,C}(f)$.

Aufgabe 2.

(a) Es sei $U = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ist und bestimmen Sie eine Basis von U.
Hinweis: Geben Sie die Basiselemente $f_1, \ldots, f_r$ in folgender Form an: $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A_{f_i} \cdot x$ (mit $A_{f_i} \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$)

(b) Finden Sie einen 4-dimensionalen Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu beweisen, dass die von Ihnen bestimmten Basen in der Tat Basen der jeweiligen Unterräume sind.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und A' die Gaußsche Normalform von A aus Satz 3.6. Betrachten Sie die Abbildungen $f_A : K^n \to K^m, x \mapsto Ax$ und $f_{A'} : K^n \to K^m, x \mapsto A'x$ Zeigen Sie, dass $\mathrm{rk}(f_A) = \mathrm{rk}(f'_A)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & a+3 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 11 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 12 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit des Parameters a.