TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 11

Abgabetermin: 13.7.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 9x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}$-linear ist. Bestimmen Sie außerdem jeweils eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$.

Aufgabe 2. Seien die Vekoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie die K-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, 4$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und W ein zu V isomorpher K-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \{f : V \to W \ K\text{-Vektorraumisomorphismus}\} &\to \{C \text{ Basis von } W\} \\ f &\mapsto (f(v_1), \ldots, f(v_n)) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist (d.h., dass $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ in der Tat eine Basis von W ist).

(b) Zeigen Sie, dass Abbildung

$$\begin{aligned} &\Psi : \{C \text{ Basis von } W\} \to \{f : V \to W \ K\text{-Vektorraumisomorphismus}\} \\ &\quad C := (w_1, \ldots, w_n) \mapsto (\text{die eindeutig bestimmte } K\text{-lineare Abbildung } f : V \to W \text{ mit } f(v_i) = w_i) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist (d.h., dass f in der Tat ein K-Vektorraumisomorphismus ist).

(c) Zeigen Sie, dass Φ die Umkehrabbildung von Ψ ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Bestimmen Sie eine Basis von $Hom_K(V, K)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst dass es für $i = 1, \ldots, n$ K-lineare Abbildungen $v_i^* : V \to K$ mit

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

gibt.