TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 10

Abgabetermin: 6.7.2015, 9:45h

Aufgabe 1. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Wir betrachten das durch die erweiterte Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 & -1 \\ 1 & 4 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 19 \end{array}\right) \in \mathbb{F}_p^{4\times(4+1)}$$

gegebene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_p$. Für welche Primzahlen p ist dieses lineare Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $V \subset K^n$ ein K-Untervektorraum von K^n mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_m)$ (wobei $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})^T$ sei). Wir identifizieren B nun mit der $m \times n$-Matrix

$$M_V := \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix} = (v_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

(d.h. wir schreiben die Vektoren v_i in Zeilenschreibweise untereinander).

(a) Sei $M_W = (w_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ eine Matrix, die aus M_V durch eine elementare Zeilenumformung entstanden ist. Zeigen Sie, dass $(w_1, \ldots, w_m)$ (mit $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})^T$, also das Transponierte der i-ten Zeile von W) eine Basis von V ist. Mit anderen Worten: Elementare Zeilenumformungen führen Basen (von V) in Basen (von V) über.

(b) Zeigen Sie, dass M_V mittels elementarer Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen in eine Matrix M'_V der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_m & (v'_{ij})_{1\leq i\leq m, m+1\leq j\leq n} \end{array}\right)$$

überführt werden kann.
Hinweis: Sie können natürlich das Verfahren aus Satz 3.6 anwenden um M_V in eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & (v'_{ij})_{1\leq i\leq r, r+1\leq j\leq n} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

zu bringen. Sie müssen also noch zeigen, dass $r = m$ gelten muss (d.h. dass die while-Schleife im Algorithmus im Beweis von Satz 3.6 m-mal durchlaufen wird).

(c) Nehmen Sie an, dass M_V ohne Spaltenvertauschungen in eine Matrix V'_M wie in Teil (b) umgeformt werden kann. Zeigen Sie, dass V der Lösungsraums des Gleichungssystem $(A|0)$ mit

$$A = \left(\begin{array}{c|c} (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n-m} & E_{n-m} \end{array}\right)$$

und $a_{ij} = -v_{j(m+i)}$ ist.
Hinweis: Es ist hilfreich zunächst die Lösungsmenge von $(\tilde{A}|0)$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} E_{n-m} & (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n-m} \end{array}\right)$$

mit Satz 3.6 zu bestimmen.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für den Untervektorraum $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\3\\3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\2\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathbb{R}^4$ ein Gleichungssystem $(A|0)$ mit $L_{(A|0)} = U$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ zwei K-Untervektorräume von V. Beweisen Sie folgende Dimensionsformel:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor: Wählen Sie eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_r)$ von $V_1 \cap V_2$ (warum existiert eine solche Basis?). Ergänzen Sie B zu einer Basis B_1 von V_1 und zu einer Basis B_2 von V_2 (warum ist das möglich?). Zeigen Sie nun, dass $B_1 \cup B_2 := \{b \in V \mid (b \in B_1) \wedge (b \in B_2)\}$ eine Basis von $V_1 + V_2$ ist. Leiten Sie daraus die Dimensionsformel ab.

Die folgende Aufgabe ist eine freiwillige Bonusaufgabe (zum Sammeln von Zusatzpunkten für die Klausurzulassung). Die Bonusaufgabe muss auf einem separaten Blatt (das mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Übungsleiters versehen ist) gelöst werden. Dieses Blatt muss in den Briefkasten von Hendrik Rombach eingeworfen werden (auch wenn Sie nicht die Übungsgruppe von Hendrik Rombach besuchen).

Aufgabe 5. (Bonusaufgabe) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{(A|b)} \subset \mathbb{R}^6$ des durch die erweiterte Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & -4 & 2 & -4 \\ -4 & -3 & -4 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4\times(6+1)}$$

gegebenen linearen Gleichungssystems.