Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015 - Übungsblatt 1

Abgabetermin: 4.5.2015, 10:00h

Aufgabe 1.

(a) Es sei M eine Menge und $A, B \subset M$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass

$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

gilt.

(b) Es seien die Mengen $A' \subset A$ und $B' \subset B$ gegeben. Welche der Symbole $\subset, \supset$ und $=$ darf man in der nächsten Zeile für $\square$ einsetzen um eine wahre Aussage zu erhalten?

$$(A \times B) \setminus (A' \times B') \square (A \setminus A') \times (B \setminus B')$$

Aufgabe 2. Seien $A', A'' \subset A$ und $B', B'' \subset B$ Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f(A' \cap A'') \subset f(A') \cap f(A'')$,

(b) $f^{-1}(B' \cap B'') \subset f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$,

(c) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$.

Gilt jeweils auch Gleichheit?

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \{1, 2\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto 2a - b$, sowie die Mengen $A = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2\}$. Bestimmen Sie das Bild $f(A)$ und das Urbild $f^{-1}(B)$.

(b) Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto 2a - 3b$. Bestimmen Sie das Bild $g(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ und das Urbild $g^{-1}(\{0\})$.

Aufgabe 4.

(a) Wir betrachten die Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto 3-z$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, z \mapsto (z, z^2-6z+9)$.

  (i) Zeigen Sie, dass sowohl f als auch g injektiv sind.

  (ii) Geben Sie die Komposition von f und g an.

(b) Seien A, B und C Mengen sowie $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei injektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : A \to C$ injektiv ist.
Hinweis: Mithilfe dieser Aussage kann man also direkt sehen, dass die Komposition von f und g aus Aufgabenteil a) auch injektiv ist.