Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Klausur Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013

20.7.2013, 14:30–16:30 Uhr

Alle nicht offensichtlichen Rechen-/Beweisschritte sind zu begründen. Resultate und Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen benutzt werden, müssen dazu aber konkret benannt (z.B. „nach dem Homomorphiesatz für Gruppen“) oder formuliert werden.

Aufgabe 1 (4+5+5 Punkte)**.**

(a) Betrachten Sie die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5.$$

Berechnen Sie für die Permuation $\sigma \circ \tau$ die disjunkte Zykelzerlegung sowie das Signum und die Ordnung.

(b) Sei $\sigma \in S_n$ (mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U_\sigma := \{\tau \in S_n \mid \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\} \subset S_n$$

eine Untergruppe von S_n ist.

(c) Berechnen Sie die Ordnung der Untergruppe $U_{(12)} \leq S_5$. Hinweis: Sei $(a_1 \dots a_m) \in S_n$ ein Zykel und $\pi \in S_n$. Sie dürfen verwenden, dass gilt $\pi \circ (a_1 \dots a_m) \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1) \dots \pi(a_m))$.

Aufgabe 2 (6+3 Punkte)**.** Gegeben seien die drei Polynome in $\mathbb{Z}_5[x]$:

$$f = (x - \bar{1})(x - \bar{2})(x - \bar{3}), \quad f_1 = x^4 + \bar{1}, \quad f_2 = x^6 + x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{3}$$

(a) Bestimmen Sie *alle* größten gemeinsamen Teiler von f_1 und f_2.

(b) Liegt f in dem von f_1 und f_2 erzeugten Ideal $\langle f_1, f_2\rangle$?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind.

(a) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $x \sim_1 y$ genau dann, wenn $x + y \in 2\mathbb{Z}$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{N}$ sei $x \sim_2 y$ genau dann, wenn es $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $y = ax^b$ gibt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Elemente des Faktorringes $\mathbb{Z}_2[x]/I$ nach dem Ideal $I = \langle x^2 + \bar{1}\rangle$. Geben Sie dazu für jedes Element einen eindeutigen Repräsentanten in $\mathbb{Z}_2[x]$ an. Welche dieser Elemente sind Einheiten bzw. Nullteiler?

Aufgabe 5 (5+4 Punkte)**.** Es sei K ein Körper. Betrachten Sie die Ideale

$$I_n := \langle t^n \rangle, \; n \in \mathbb{N},$$

im Potenzreihenring $K[\![t]\!]$.

(a) Zeigen Sie, dass es neben den I_n und dem Nullideal keine weiteren Ideale in $K[\![t]\!]$ gibt.

(b) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Z}_p$ alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $a \in I_n$ auch die (formale) Ableitung a' in I_n liegt.

Aufgabe 6 (5+3+4 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe. Man nennt

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$

den Kommutator von $a, b \in G$. Zeigen Sie:

(a) Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe

$$[G, G] := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$$

ist ein Normalteiler von G.

(b) Für jeden Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gilt $[G, G] \subseteq N$ genau dann, wenn G/N abelsch ist.

(c) Bezeichne $\pi\colon G \to G/[G, G]$, $g \mapsto \bar{g}$, den Restklassenhomomorphismus und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus von G in eine abelsche Gruppe H. Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon G/[G, G] \to H$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.