

Einführung in die Algebra

Wintersemester 2013/14 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 23.1.2014, 12:00h

Aufgabe 1.

(a) Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \{ \text{Gruppenoperationen von } G \text{ auf } M \} &\rightarrow \{ \text{Gruppenmorphisimen } G \rightarrow S(M) \} \\ G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto g.m &\mapsto G \rightarrow S(M), g \mapsto \sigma_g \end{aligned}$$

(mit $\sigma_g(m) = g.m$ für alle $g \in G$ und $m \in M$) wohldefiniert und bijektiv ist. Wir nennen das Bild einer Gruppenoperation unter Ψ die Permutationsdarstellung der Gruppenoperation.

(b) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G . Dann operiert G auf der Menge A der Linksnebenklassen von H in G durch Linksmultiplikation. Bezeichne π_H die Permutationsdarstellung dieser Gruppenoperation. Zeigen Sie:

- G operiert transitiv auf A .
- Für den Stabilisator von $1H$ in G gilt $G_{1H} = H$.
- Es gilt $\text{Ker}(\pi_H) = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$ und $\text{Ker}(\pi_H)$ ist der größte Normalteiler von G , der in H enthalten ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G . Wir bezeichnen mit $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ den Normalisator von H in G und mit $Z_G(H) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in H\}$ den Zentralisator von H in G . Zeigen Sie:

- Ist H ein Normalteiler, so operiert G durch Konjugation auf H . Die zugehörige Permutationsdarstellung induziert einen Isomorphismus von $G/Z_G(H)$ in eine Untergruppe von $\text{Aut}(H)$.
- Die Quotientengruppe $N_G(H)/Z_G(H)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(H)$. Insbesondere ist $G/Z(G)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(G)$.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe mit $|G| = 2p$. Zeigen Sie, dass G zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_{2p} ist, wobei

$$D_{2p} := \{e, g, g^2, \dots, g^{p-1}, u, gu, g^2u, \dots, g^{p-1}u\}$$

mit $g^p = u^2 = e$ und $ug = g^{p-1}u$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der folgenden Ordnungen einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt:

- 42
- 30
- 27.