Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Einführung in die Algebra

Wintersemester 2013/14 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: 9.1.2014, 12:00h

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl und F ein Körper mit $\operatorname{char} F = p$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\sigma : F \to F : x \mapsto x^p$ ist ein Körpermonomorphismus.

(b) Es gilt $f(t^p) = f(t)^p$ für alle Polynome $f(t) \in \mathbb{F}_p[t]$.

(c) Sei $f(t) \in F[t]$ ein irreduzibles Polynom. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}$ und ein eindeutig bestimmtes irreduzibles und separables Polynom $f_{\mathrm{sep}}(t) \in F[t]$ mit

$$f(t) = f_{\mathrm{sep}}(t^{p^k}).$$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ (mit p prim und $n \in \mathbb{N}$) galoissch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe $G(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ ungerade und bezeichne Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom. Man zeige:

$$\Phi_{2n}(t) = \Phi_n(-t).$$

Aufgabe 4. Sei $f = t^3 + \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0 \in \mathbb{Q}[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 3 und sei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Wir definieren die Diskriminante von f als

$$\Delta := \lambda_1^2\lambda_2^2 - 4\lambda_1^3 - 4\lambda_0\lambda_2^3 + 18\lambda_0\lambda_1\lambda_2 - 27\lambda_0^2 \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist $\Delta \neq 0$ und es gilt:

(a) Ist Δ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$, also $\Delta = z^2$ mit $z \in \mathbb{Q}$, so ist $G(L/\mathbb{Q}) \cong A_3$.

(b) Ist Δ kein Quadrat in $\mathbb{Q}$, so ist $G(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

(Hinweis: Schreiben Sie $f = (t-a_1)(t-a_2)(t-a_3) \in \mathbb{C}[t]$ und zeigen Sie, dass für die Diskriminante $\Delta = (a_1 - a_2)^2(a_3 - a_1)^2(a_2 - a_3)^2$ gilt. Betrachten Sie $z = (a_1 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_3)$, um (a) und (b) zu beweisen.)