Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Einführung in die Algebra

Wintersemester 2013/14 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 12.12.2013, 12:00h

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein seperables Polynom von Grad n mit Zerfällungskörper L. Zeigen Sie, dass $G(L/K) \subset S_n$ genau dann transitiv auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ operiert, wenn f irreduzibel ist.

Aufgabe 2. Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung und Z ein Zwischenkörper von L/K. Zeigen Sie, dass dann L/Z auch galoissch ist.

(Hinweis: Verwenden Sie Induktion über $[Z : K]$ und den Beweis der Aussage $|G(L/K)| \leq [L : K]$ aus der Vorlesung.)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Körpererweiterung $L/K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{6})$.

(a) Zeigen Sie, dass L/K nicht galoissch ist.
(Hinweis: Sie dürfen Proposition 7 des in den Übungen ausgeteilten Kurzskriptes zur Galoistheorie verwenden. Außerdem ist die Darstellung $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ hilfreich.)

(b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von L/K.
(Hinweis: Sie haben in Teil (a) gezeigt, dass L/K nicht galoissch ist. Daher können Sie den Hauptsatz der Galoistheorie auf die Körpererweiterung L/K nicht anwenden. Gehen Sie deshalb zu dem Zerfällungskörper L' von $m_{\sqrt[3]{2}} \cdot m_{i\sqrt{6}}$ über und wenden Sie den Hauptsatz auf L'/K an.)