TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Einführung in die Algebra

Wintersemester 2013/14 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 14.11.2013, 12:00h

Aufgabe 1. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $p \in \mathbb{Z}[x]$ auch prim ist.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, und berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(b) Gilt auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$?

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{4 + \sqrt{12}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ gilt.

Aufgabe 3. Seien K_1, K_2 zwei Teilkörper des Körpers L. Wir definieren

$$K_1 K_2 := \bigcap_{\substack{K_1, K_2 \subseteq N \subseteq L \\ N \text{ Körper}}} N,$$

das heißt, $K_1 K_2$ ist der kleinste Teilkörper von L, der K_1 und K_2 enthält.

(a) Seien K_1, K_2 zwei Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K. Dann gilt:

$$[K_1 K_2 : K] \leq [K_1 : K] \cdot [K_2 : K],$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn eine K-Basis von einem der Körper K_1 oder K_2 linear unabhängig über dem anderen Körper bleibt. Insbesondere gilt Gleichheit falls $\operatorname{ggt}([K_1 : K], [K_2 : K]) = 1$.

(b) Bestimmen Sie $[K(a, b) : K]$, $[a : K]$ und $[b : K]$ für den Fall $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}$, $a = \sqrt[3]{2}$ und $b = \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}$. (Hinweis: Man zeige und benutze $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$.)

Aufgabe 4. Es seien $K \leq Z \leq L$ Körper und $a_1, \ldots, a_n \in L$.

(a) Zeigen Sie: Sind $a_1, \ldots, a_n$ algebraisch über K, so ist $K(a_1, \ldots, a_n)/K$ eine endliche Körpererweiterung.

(b) Geben Sie eine explizite Darstellung der Elemente in $K(a_1, \ldots, a_n)$ an.

(c) Man beweise: Sind die Erweiterungen L/Z und Z/K algebraisch, so auch L/K.