Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Einführung in die Algebra

Wintersemester 2013/14 - Übungsblatt 1

Abgabetermin: 31.10.2013, 12:00h

Der Primkörper K' eines Körpers K ist der Schnitt aller Teilkörper von K, d.h.

$$K' = \bigcap_{\substack{N \subseteq K \\ N \text{ Körper}}} N.$$

Es wurde in der Vorlesung gezeigt: K' ist isomorph zu $\mathbb{Q}$, falls $\operatorname{char} K = 0$, und isomorph zu $\mathbb{F}_p$, falls $\operatorname{char} K = p > 0$.

Aufgabe 1. Sei L/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(a) L ist ein Vektorraum über K.

(b) Ist $|K| = p$ und $|L| = q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q = p^n$.

(c) Ist L ein endlicher Körper, dann gibt es eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|L| = p^n$ gilt.

Aufgabe 2. Sei L/K eine Körpererweiterung und $M_1, M_2 \subseteq L$ zwei Teilmengen. Zeigen Sie, dass

$$(K(M_1))(M_2) = (K(M_2))(M_1) = K(M_1 \cup M_2),$$

d.h., dass es bei der Adjunktion nicht auf die Reihenfolge ankommt.

Aufgabe 3.

(a) Sei $f = X^2 + X + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[X]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2[X]/\langle f \rangle$ ein Körper mit 4 Elementen ist und bestimmen Sie die Multiplikations- und die Additionstabelle.

(b) Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{F}_3[X]/\langle X^2 + \bar{1} \rangle$. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe des Körpers zyklisch ist und bestimmen Sie ein $a \in K^*$ mit $K^* = \langle a \rangle$.

Aufgabe 4. (Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden in der komplexen Ebene) Sei G eine Gerade durch die Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (mit $z_1 \neq z_2$) und K ein Kreis mit Mittelpunkt $z_3 \in \mathbb{C}$ durch $z_4 \in \mathbb{C}$ (mit $z_3 \neq z_4$). Bestimmen Sie die Schnittpunkte $G \cap K$ in Abhängigkeit von z_1, z_2, z_3, z_4.