Informatik Spektrum 22: 45–48 (1999)

Overflow

CRASH! Mathematik und kombinatorisches Chaos prallen aufeinander

Jürg Nievergelt, Fabian Maeser, Bernward Mann,
Karsten Roeseler, Mathias Schulze, Christoph Wirth

1. Was soll das Spiel?

Spiele haben die Wissenschaft oft mit neuen Ideen befruchtet, die erst später praktische Anwendung fanden. Glücksspiele sind das prominenteste Beispiel: sie führten zur Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie, heute ein unerlässliches Werkzeug der Wissenschaft und Technik. Gesellschaftsspiele inspirierten die mathematische Spieltheorie, welche eine zunehmende Bedeutung in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften gewinnt.

In dieser Spalte haben wir hin und wieder Spiele besprochen, die einer mathematischen Analyse zugänglich sind. An solche "Strategie-Spiele" werden verschiedene Anforderungen gestellt:

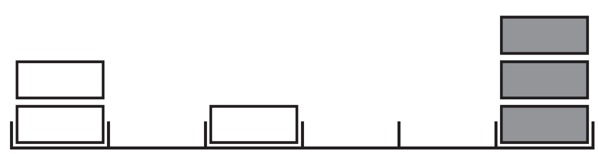
- Didaktischer Wert: das Spiel soll ein allgemeines mathematisches Prinzip in möglichst einfacher Form illustrieren
- Es soll aber nicht vollständig mathematisch gelöst sein, damit es Spielraum für kreative Intuition und Anreiz für eigene Forschung lässt. Ein Spiel wie z.B. Nim, das mathematisch vollständig gelöst ist, verliert den Spielcharakter für den, der die Lösung kennt.
- Es soll unterhaltend sein, abwechslungsreich und kurz, damit die Spieler eine schnelle Rückmeldung über Erfolg oder Misserfolg ihrer Strategie erhalten.

Das Spiel CRASH! entstand aus einem Versuch, das breite Spektrum der Methoden aufzuzeigen, die zur Analyse von Spielen eingesetzt werden. Als Hauptziel nahmen wir uns vor, gewisse mathematische Konzepte, Rechenmethoden und den Einsatz von Softwaretechnik in möglichst einfacher Gestalt zu illustrieren. Wo die Mathematik und Berechnungen von Hand nicht mehr ausreichen, werden Computer eingesetzt, um eine Vielzahl von Einzelfällen erschöpfend zu untersuchen. Der Leser kann auf dem Web gegen heuristische und optimale Spielalgorithmen antreten – besuchen Sie http://wwwjn.inf.ethz.ch/febi/crash.

Die erschöpfende Analyse vieler Einzelfälle und die Erstellung der Spielprogramme, geschah mit Hilfe von zwei allgemein einsetzbaren Rahmenprogrammen, Search Bench und Game Bench. Diese sind zur Analyse und Implementation beliebiger Strategiespiele entworfen worden. Die Anpassung an ein konkretes Spiel verlangt meistens nur ein halbes Dutzend kurze, spiel-spezifische Programme. Der Einsatz bewährter Methoden und Mittel ersetzt potentiell aufwendige Arbeit.

2. CRASH! und seine Spielregeln

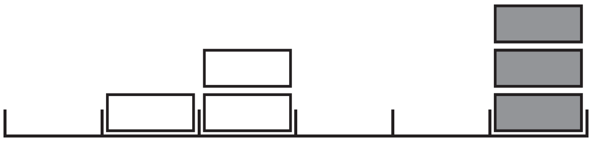
Zwei Spieler, Weiss und Schwarz, besitzen je eine Anzahl Steine ihrer eigenen Farbe. Als Spielfeld nehmen wir einen Array A[1..m] von beliebiger Länge m. Im allgemeinen Spielzustand liegen die Steine auf den Feldern von A derart, dass alle weissen Steine links der schwarzen liegen, d.h. bei kleineren Indizes. Jedes Feld von A ist entweder leer oder mit einem Turm von Steinen derselben Farbe belegt. Im folgenden Beispiel hat Weiss einen Zweierturm und einen vorgerückten Einzelstein, und Schwarz hat einen Dreierturm. Die vordersten Steine ungleicher Farbe sind durch eine Lücke von L = 2 Feldern getrennt.



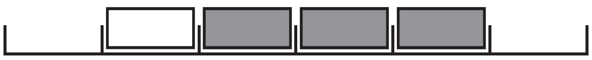
Die Spieler ziehen abwechselnd, wobei Weiss nach rechts und Schwarz nach links vorrückt. Ein Zug von Weiss besteht darin, dass er einen einzigen Turm weisser Steine der Höhe $H > 0$ auf einem Feld mit Index i "abträgt". "Abtragen" ist wie folgt definiert: Weiss entnimmt diesem Turm h Steine, $1 \leq h \leq H$, und legt je einen dieser h Steine auf jedes nachfolgende Feld, mit Indizes i+1, .., i+h: jedes dieser h Felder erhält genau einen neuen weissen Stein. Falls sich dort ein weisser Turm befindet, dann wächst dieser um einen Stein; ein schwarzer Turm hingegen wird entfernt, wonach auf diesem Feld genau ein weisser Stein zu liegen kommt. Ein schwarzer Zug ist analog definiert, wobei ein schwarzer Turm am Ort j auf Felder mit Indizes j-1, .., j-h abgetragen wird. Es ist unmöglich, dass sich weisse und schwarze Steine kreuzen. Also wird einer der beiden Haufen vernichtet, und dieser Spieler verliert. Der Name "CRASH!" deutet das Aufeinanderprallen zweier Haufen von Steinen an.

Jürg Nievergelt, Fabian Maeser, Christoph Wirth
ETH Zürich, Institut für Informatik, CH-8092 Zürich, Schweiz
Bernward Mann, Düsseldorf
Karsten Roeseler, Göttingen
Mathias Schulze, Kaiserslautern

Beispiel: Weiss am Zug im obigen Spielzustand kann seinen Zweierturm abtragen und erreicht damit die folgende Stellung:

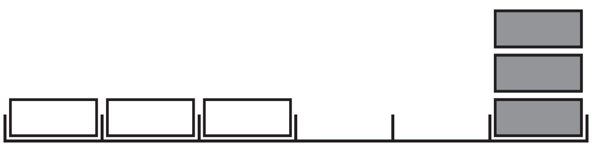


Nun wird Schwarz seinen Dreierturm abtragen:



Danach schlägt Weiss den schwarzen Stein auf Feld 3, aber Schwarz schlägt gleich zurück und gewinnt, da Weiss keine Steine mehr besitzt.

In der Ausgangsstellung hatte Weiss noch andere Züge; genau deren 3, nämlich soviele, wie er Steine hat. Er hätte mit seinem ersten Zug auch die folgende Stellung herbeiführen können (aber bei gutem Spiel von Schwarz trotzdem verloren):



Wieviele Steine am Anfang auf das Spielfeld gesetzt werden, und wo, das soll offen bleiben. Zwei plausible Varianten: jeder Spieler hat am Anfang einen einzigen Turm gleicher Höhe H, in einem vorgegebenen Abstand L voneinander, oder: die Spieler setzen ihre Steine nach eigener Wahl beliebig in ihrem "Heimbereich", z.B. Weiss auf den ersten b Feldern, Schwarz auf den letzten b Feldern. Wir legen den Anfangszustand nicht fest, denn wir wollen den allgemeinen Spielzustand analysieren, der aus beliebigen Anfangspositionen entstehen kann.

3. Spielerfahrung, Analyse des trivialen CRASH!

Der interessierte Leser möge mit Papier und Münzen von zwei verschiedenen Arten ein CRASH!-Spiel improvisieren und dabei gleich die folgenden Erfahrungstatsachen verifizieren:

- Material ist wichtig! Ein grosser Haufen vernichtet einen kleineren Gegner. Als Beispiel betrachte man zwei gegnerische Türme verschiedener Höhe. Der höhere Turm hat beim Abtragen eine grössere Reichweite, er kann also gegnerische Steine aus der Ferne schlagen, während er selbst noch nicht angegriffen ist.
- Jeder Spieler muss danach trachten, alle seine Steine kompakt auf kleinem Raum zusammenzuhalten. Beim Aufprall ist es nützlich, soviel Masse wie möglich gleichzeitig einzusetzen. Man betrachte als Bestätigung die Tatsache, dass zwei zusammen vorrückende weisse Steine beliebig viele schwarze schlagen können, die zerstreut einzeln auftreten.

Dies sind wohl die einzigen allgemein gültigen Daumenregeln, die ins Auge fallen. Alles andere, d.h. die genaue Aufstellung der Steine beim Aufprall, verlangt detailliertes Rechnen. Gekoppelt mit der erforderlichen Rechenkapazität liefern diese Regeln ausserordentlich wirksame Heuristiken, wie das in Abschnitt 6 beschriebene Spielprogramm zeigt.

Der Versuch, diese nützlichen Daumenregeln mathematisch streng zu fassen und daraus beweisbare Folgerungen zu schliessen, führt natürlicherweise zur Analyse der einfachsten Varianten von CRASH! Die vollständige Analyse eines Spiels besteht aus einer Methode (z.B. Tabelle, Formel, Algorithmus), die jedem beliebigen Spielzustand seinen spieltheoretischen Wert zuordnet; im Beispiel von CRASH! ist dies die Angabe des Spielers, der bei optimalem Spiel gewinnt.

Beginnen wir mit dem allereinfachsten Spiel "1-gegen-1 bei Abstand L", wobei L die Länge der Lücke zwischen dem vordesten weissen und dem vordesten schwarzen Stein messen soll. Betrachtung der Fälle L = 0, 1, 2 lässt sofort die Verallgemeinerung zu: L gerade ist gewonnen für den Anziehenden, L ungerade für den Nachziehenden.

Um es kompliziert zu sagen: Jedes Zugpaar "Weiss zieht, Schwarz zieht", bei dem kein Stein geschlagen wird, verkleinert den Abstand L um 2, und bewahrt daher die Parität von L. Das Ergebnis der trivialen Fälle L = 0 und L = 1 bestimmt daher, dank der Paritätsinvariante, das Ergebnis aller Fälle.

4. "2-gegen-2 Crash": beim Aufprall entscheidet die Parität

Dank einem glücklichen Zufall lässt sich diese einfache Paritätsinvariante vom "1-gegen-1" auf den Fall "2-gegen-2" ausdehnen. Wir ordnen einem Zweierhaufen, dessen Steine auf den Feldern i und j liegen, die Parität (i+j) mod 2 zu. Bei einem "Einerzug" von Weiss (z.B. i := i+1) ändert sich die Parität. Bei einem "Zweierzug" von Weiss, wenn i = j und der Zweierturm ganz abgetragen wird, ändert sich die Parität ebenfalls: aus der Summe 2i vor dem Zweierzug entsteht nachher die Summe (i+1)+(i+2) = 2i+3. Analog ändert jeder Zug von Schwarz, ob "Einerzug" oder "Zweierzug", die Parität des schwarzen Haufens.

Dies führt zur Paritätsinvariante: Jedes Zugpaar "Weiss zieht, Schwarz zieht", bei dem kein Stein geschlagen wird, bewahrt die Parität p = (i+j+k+l) mod 2 der vier Steine.

Genau wie bei der Analyse des "1-gegen-1" Spiels erlaubt diese Paritätsinvariante die Reduktion des "2-gegen-2" Spiels von unendlich vielen Fällen auf endlich viele. Es wird aber etwas komplizierter als nur "L = 0 oder L = 1"; wir müssen uns genau überlegen, auf welche verschiedenen Arten zwei weisse Steine auf zwei schwarze aufprallen können. Dies erfordert eine erschöpfende Analyse aller Möglichkeiten, die noch leicht von Hand durchgeführt werden kann. Wir zeigen den Kern dieser Analyse leicht abgekürzt.

1) Alle möglichen "2-gegen-2" Stellungen werden entsprechend ihrer Parität p = (i+j+k+l) mod 2 in zwei Klassen eingeteilt: die geraden Stellungen mit p = 0, und die ungeraden mit p = 1. Wir nennen den Anziehenden in einer Stellung mit p = 0 "Weiss", den Anziehenden in einer Stellung mit p = 1 "Schwarz". Wir zeigen, dass Schwarz gewinnt, oder genauer:

In jeder Stellung des "2-gegen-2" CRASH!, in der die weissen und die schwarzen Steine um mindestens 2 Felder getrennt sind, gilt: in geraden Stellungen hat der Nachziehende eine Gewinnstrategie, in ungeraden der Anziehende.

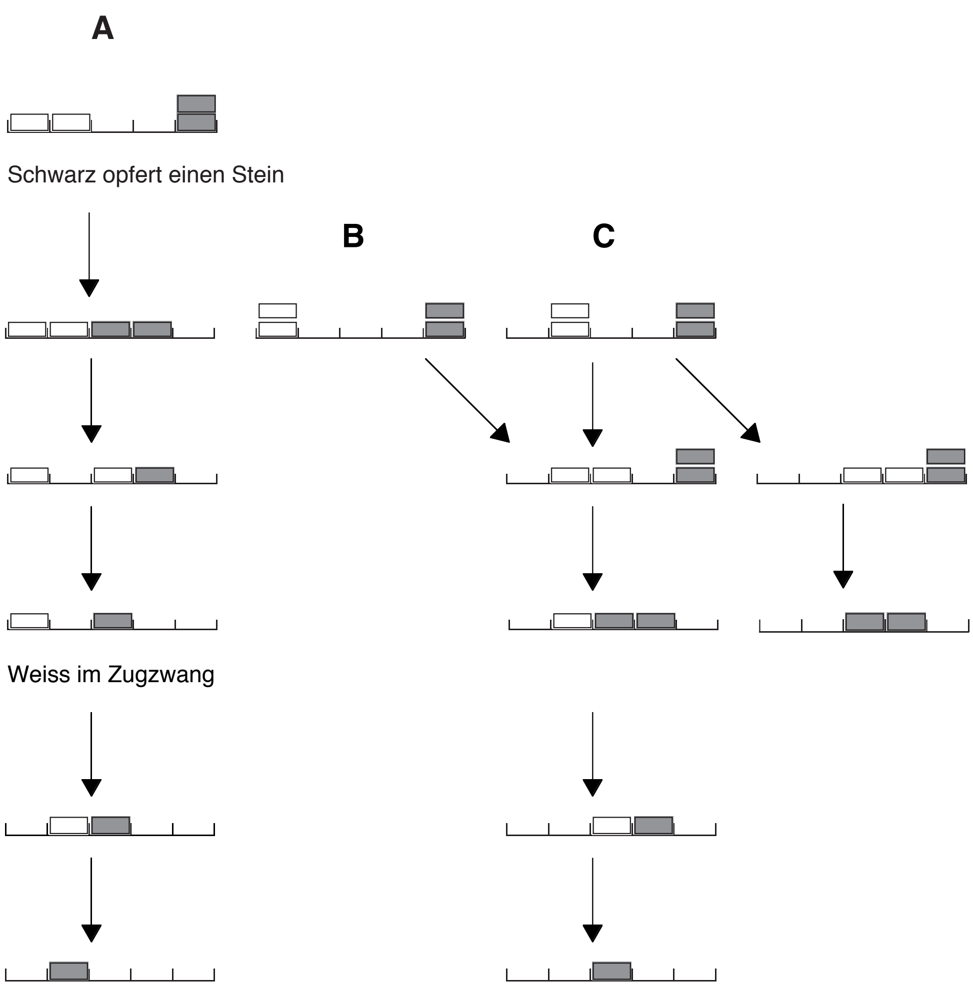
2) Es ist für keinen Spieler je von Vorteil, seine zwei Steine getrennt zu führen, d.h. getrennt von einer Lücke von mindestens einem Feld. Das beste Spielergebnis, das mit getrennten Steinen erreicht werden kann, kann ebenfallsmit Steinen erreicht werden, die stets entweder nebeneinander oder in einem Zweierturm übereinander liegen.

3) Wir betrachten nun eine beliebige "2-gegen-2" Stellung mit Lücke $L \geq 2$, in der beide Spieler ihre Steine anliegend führen, d.h. zu jedem Zeitpunkt sind gleichfarbige Steine nebeneinander oder übereinander. Diese zwei Haufen bewegen sich aufeinander zu. Solange ihr Abstand $L \geq 2$ ist, können im nächsten Zug noch keine Steine geschlagen werden, und die Parität bleibt erhalten: bei $p = 0$ ist Weiss am Zug, bei $p = 1$ Schwarz. In jedem Partieverlauf betrachten wir nun den eindeutig bestimmten Zug, der die Lücke L zwischen den weissen und den schwarzen Steinen von $L \geq 2$ auf $L < 2$ verkleinert. Es gibt genau 3 Fälle zu betrachten, genannt A, B, C. Im folgenden Bild sind Zugfolgen vertikal zu lesen, oder entlang den zwei diagonal nach unten gerichteten Pfeilen.

Warum untersuchen wir einen offensichtlich schlechten Zug von Weiss wie den Zweierzug, der aus Stellung B zur Nachfolgestellung von C führt, und gleich einen Stein verliert? Weil dieser Zug die Lücke $L = 3$ auf $L = 1$ reduziert. Um "die Basis der Induktion" zu sichern, dass wir wirklich alle Fälle untersuchen, wie die Steine kurz vor einem Schlagabtausch stehen können, hatten wir die Regel festgelegt: "betrachte den eindeutig bestimmten Zug, der die Lücke L von $L \geq 2$ auf $L < 2$ verkleinert. Den vorsichtigeren Zug von Weiss, der aus B zu Stellung A führt, müssen wir nicht explizite betrachten. Er verkleinert die Lücke von $L = 3$ auf $L = 2$, liegt also noch "vor Torschluss". Warum betrachten wir in Stellung A nur den Fall, dass Schwarz am Zug ist? Die Parität von A ist ungerade, also muss Schwarz am Zug sein. Warum betrachten wir in Stellung A nur einen einzigen Zug von Schwarz, den Zweierzug, nicht auch den vorsichtigeren Einerzug? Um zu zeigen, dass Schwarz gewinnen kann genügt es, den eleganten Opferzug von Schwarz zu untersuchen – der „vorsichtige" Einerzug verliert!

A, B und C sind also die einzigen Stellungen mit Zügen, welche die Lücke von $L \geq 2$ auf $L < 2$ verkleinern. In C hat Weiss zwei Züge, welche die Lückenschwelle $L = 2$ unterschreiten, wobei der Zweierzug sofort verliert. Die Analyse der Zugfolgen aus den Stellungen A, B, C unterlässt einige mögliche Züge von Weiss, die aber alle mindestens so schnell verlieren wie die aufgeführten Hauptvarianten. Damit ist die erschöpfende Aufzählung aller "Aufpralle" vollständig, und wir haben bewiesen:

In jeder **geraden** Stellung des "2-gegen-2" Spiels, in der die weissen und die schwarzen Steine um **mindestens 2 Felder** getrennt sind, hat der Nachziehende eine Gewinnstrategie.



Da jeder Halbzug die Parität ändert, folgt:

In jeder **ungeraden** Stellung des "2-gegen-2" Spiels, in der die weissen und die schwarzen Steine um **mindestens 3 Felder** getrennt sind, hat der Nachziehende eine Gewinnstrategie.

5.Bei grösseren CRASH! überwiegt das kombinatorische Chaos

Versuchen wir, diese Analyse dank Paritätsinvariante auf mehr als zwei Steine zu verallgemeinern. Die erste Schwierigkeit treffen wir darin an, dass verschiedene Züge die Parität auf verschiedene Art beeinflussen. Wenn ein Spieler nämlich einen Dreierturm ganz abträgt, dann ändert sich die Indexsumme seines Haufens von 3i auf (i+1)+(i+2)+(i+3) = 3i+6. Da nun jeder Spieler Züge beider Art hat, Paritäts-ändernde und Paritäts-bewahrende, kann keine einfache Invariante wie vorher gelten. Diese Schwierigkeit liesse sich zumindest beim "3-gegen-3" CRASH! mit einer komplizierteren Paritätsanalyse überwinden, die sich auf die folgende Beobachtung gründet. Nachdem ein Spieler seinen Dreierturm ganz abgetragen hat, braucht er mindestens drei Züge, bis er einen neuen Dreierturm aufgebaut hat. In dieser Zeit kann sein Gegner auch einen Dreierturm aufbauen und ganz abtragen. Solange die beiden Haufen noch weit voneinander entfernt sind kann also ein Spieler, der die Parität der ganzen Stellung bewahren will, diese in jeder Periode von 4 Zügen immer wieder herstellen.

Leider nützt ihm dies aber nichts! Es war wohl ein Zufall, dass die Taktik des Aufpralls beim "2-gegen-2" CRASH! durch eine einfache Paritätsregel gelenkt werden kann. Es gibt keinen Grund, eine einfache Regelmässigkeit zu erwarten - in der Kombinatorik herrscht als Default das Chaos! Eine ausgiebige Computeruntersuchung des Aufpralls von zwei Dreierhaufen zeigt sogar, dass keine einfache Paritätsregel existieren kann. Es gibt nämlich keine genügend grosse Teilmenge die man von Ferne ansteuern könnte, in der Gewinn oder Verlust durch Parität entschieden wird. Eine optimale Strategie kann im allgemeinen also kaum einfacher dargestellt werden als durch vollständige Aufzählung aller Stellungen. Wir sind damit im Bereich angelangt, wo Mathematik und Untersuchungen von Hand der rohen Rechenleistung weichen müssen.

Christoph Wirth hat Datenbanken der optimalen Spielweise im "n-gegen-n" CRASH! für mehrere Werte von n bei verschiedenen Brettgrössen berechnet. Dies mit Hilfe des Softwarepakets "SearchBench" zur erschöpfenden Analyse von Spielen mittels Rückwärtsanalyse. Als Kostprobe können Sie Ihre Intuition und Fertigkeit testen indem Sie gegen den optimalen "3-gegen-3" Spieler auf unserer Webseite antreten.

6.Ein Gegner der erwünschten Spielstärke

Mathias Schulze hat einen einfachen, gierigen CRASH! Spieler implementiert, der zwar nicht perfekt spielt, aber bei genügender Bedenkzeit gegen menschliche Gegner doch oft gewinnt. Dieses Programm verwendet nur die zwei Heuristiken aus Abschnitt 3: Steine kompakt zusammen halten, wenn möglich Material gewinnen. Es sucht den Spielbaum ab bis zur maximalen Suchtiefe, die ihm der menschliche Gegner zugesteht. Wenn es innerhalb dieses Suchhorizontes materiellen Vorteil erzwingen kann, dann ist die Partie gelaufen. Der Mensch kann der rechenintensiven Suche der Maschine nichts gleichwertiges entgegen stellen, macht Fehler und verliert oft auch in theoretisch gewonnenen Stellungen.

Der CRASH! Spieler stützt sich auf die Game Bench von Fabian Mäser ab. Diese Software ist ein Werkzeug zum Erstellen von (2 Personen-) Spielprogrammen. Sie gibt einen Einblick in die Funktionsweise der Suchalgorithmen und -techniken (Minimax, Alphabeta, Hashing, etc.) und stellt diese als spielunabhängige Komponenten dem Spielprogrammierer zur Verfügung. Dieser muss sich nur um die spielabhängigen Teile kümmern: Spielbrett, Regeln, Darstellung. Die Game Bench ist in Java implementiert. Der Quellcode ist auf der WWW-Seite http:wwwjn.inf.ethz.ch/febi/sgb/sgbMain.html erhältlich.
Der "Crash"-Computerpieler kann auf http:wwwjn.inf.ethz.ch/febi/crash herausgefordert werden.

Dank. Wir danken der Schweizer Studienstiftung (www.access.ch/studienstiftung) welche es uns ermöglichte, im Sommer 1998 eine Akademie zum Thema "Spieltheorie für Menschen und für Maschinen" durchzuführen. Die Schweizer Studienstiftung widmet sich, wie auch die traditionsreiche Studienstiftung des Deutschen Volkes, der Förderung begabter Studenten. Beide Stiftungen organisieren jedes Jahr Sommerakademien in den verschiedensten akademischen Disziplinen, wobei auch ein Austausch zwischen Deutschen und Schweizer Studenten statt findet.

Unter der Leitung von Bernhard von Stengel und Jürg Nievergelt wurden Einzelthemen aus dem vielfältigen Ideenbereich der Spieltheorie und ihren Anwendungen aufgegriffen und von den Teilnehmern in Projektarbeit aktiv bearbeitet. Dabei werden Methoden und Ergebnisse aus dem breiten Spektrum der Mathematik, Informatik und Heuristik eingesetzt. Das Projekt von Mathias Schulze (Kaiserslautern), Karsten Roeseler (Göttingen) und Bernward Mann (Düsseldorf) illustriert das breite Spektrum der Methoden, die zur Analyse von Spielen eingesetzt werden. Ein neues Spiel wurde mit dem Ziel entworfen, gewisse mathematische Ideen in einfachstmöglicher Gestalt zu illustrieren. Wo Mathematik und Berechnungen von Hand nicht mehr ausreichen, werden Computer eingesetzt, um eine Vielzahl von Einzelfällen erschöpfend zu untersuchen. Damit nicht alles Theorie bleibt, wird das Spiel implementiert mit Hilfe eines Rahmenprogramms, das die Implementation einer Vielfalt von Spielen erleichtert. Die Mehrzahl der beschriebenen Ergebnisse wurde als Gruppenprojekt innerhalb einer Arbeitswoche erzielt, dank dem Einsatz bewährter Methoden und Mittel.